Número de vueltas y $\exp(C(\mathbb{T}))$

Estudiarémos el subgrupo $\mathrm{Inv}_0(C(\mathbb{T})) = \exp(C(\mathbb{T}))$ del grupo $\mathrm{Inv}(C(\mathbb{T}))$ y el grupo cociente $\mathrm{Inv}(C(\mathbb{T}))/\mathrm{Inv}_0(C(\mathbb{T}))$.

Logaritmo continuo y argumento continuo

Al principio, vamos a mostrar unas proposiciones auxiliares para funciones continuas en un segmento $[\alpha, \beta]$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha < \beta$.

1. La función $\log_0 \colon (1 + \mathbb{D}) \to \mathbb{C}$, definida mediante

$$\log_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-1)^n}{n},$$

es analítica en $1 + \mathbb{D}$, y $\exp(\log_0(z)) = z$ para todos $z \in 1 + \mathbb{D}$.

2. Lema (existencia local de logaritmo continuo). Sean $b \in C([\alpha, \beta])$, $b(\alpha) \neq 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $\alpha + \delta \leqslant \beta$ y $|b(x) - b(\alpha)| < |b(\alpha)|$ para $x \in [\alpha, \alpha + \delta]$. Luego, sea η uno de los valores de logaritmo de $b(\alpha)$, i.e. $b(\alpha) = e^{\eta}$. Entonces existe una función $f_1 \in C([\alpha, \alpha + \delta])$ tal que $f_1(\alpha) = \eta$ y $b(x) = e^{f_1(x)}$ para todos $x \in [\alpha, \alpha + \delta]$.

3. Teorema (existencia de logaritmo continuo). Sea $b \in \mathrm{Inv}(C([\alpha, \beta]))$. Entonces existe una función $f \in C([\alpha, \beta])$ tal que

$$b(x) = e^{f(x)} \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

La función f se llama *logaritmo continuo* de la función b.

4. Unicidad de logaritmo continuo salvo a adición de $2\pi i$. Sean $b \in \mathrm{Inv}(C([\alpha, \beta]))$, $f_1, f_2 \in C([\alpha, \beta])$ tales que

$$b(x) = e^{f_1(x)} = e^{f_2(x)} \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f_1(x) = f_2(x) + 2\pi i k$ para todos $x \in [\alpha, \beta]$. En particular,

$$f_1(\beta) - f_1(\alpha) = f_2(\beta) - f_2(\alpha).$$

Definición (argumento continuo). Sea $b \in \mathrm{Inv}(C([\alpha, \beta]))$. La función $h \in C([\alpha, \beta])$ es *argumento continuo de* b si

$$b(x) = |b(x)| e^{ih(x)} \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

5. Sea $b \in \mathrm{Inv}(C([\alpha, \beta]))$. ¿Cómo están relacionadas logaritmos continuos de b y argumentos continuos de b? Formular proposiciones acerca de existencia y unicidad de argumento continuo.

Número de vueltas

Definición (número de vueltas). Sea $a \in \operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))$. El *número de vueltas* (*winding number*) de a se define como

$$\operatorname{wind}(a) := \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi i}$$

donde f es cualquier logaritmo continuo de la función $x \mapsto a(e^{ix})$.

6. ¿Cómo definir $\operatorname{wind}(a)$ en términos de argumento continuo?

7. Sea $a \in \operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))$. Entonces $\operatorname{wind}(a) \in \mathbb{Z}$.

8. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\qquad \operatorname{wind}(e_n) = n$.

9. Número de vueltas es un epimorfismo de grupos. El mapeo

$$\operatorname{wind}\colon \operatorname{Inv}(C(\mathbb{T})) \to \mathbb{Z}$$

es un epimorfismo de grupos.

10. El mapeo wind es continuo y, como tiene valores enteros, es constante en cada componente conexo de $\operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))$.

Descripción de $\exp(C(\mathbb{T}))$ en términos de wind

Recordamos que en cualquier álgebra de Banach A

$$\exp(A) := \{a \in A\colon \exists f \in A \ a = \exp(f)\}.$$

Antes hemos probado que en álgebras conmutativas $\exp(A$ coincide con $\operatorname{Inv}_1(A)$, i.e. con el componente conexo de A conteniendo e.

11. Teorema. $\ker \operatorname{wind} = \exp(C(\mathbb{T}))$. En otras palabras, para cada $a \in C(\mathbb{T})$

$$\exists f \in C(\mathbb{T}) \quad a = \exp(f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \inf_{t \in \mathbb{T}} |a(t)| > 0 \quad \wedge \quad \operatorname{wind}(a) = 0.$$

12. El grupo cociente $\operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))/\exp(C(\mathbb{T}))$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Definición (funciones homotópicas en $\operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))$). Funciones a y b son *homotópicas en* $\operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))$, $a \simeq b$, si existe una aplicación continua $H\colon [0,1] \to \operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))$ tal que $H(0) = a$ y $H(1) = b$. En otras palabras, $a \simeq b$ si a y b pertenecen a una misma componente conexa (= arco conexa) de $\operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))$.

13. Lema. Sea $a \in \operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))$. Entonces $a \simeq e \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{wind}(a) = 0$.

14. Teorema. Sean $a, b \in \operatorname{Inv}(C(\mathbb{T}))$. Entonces

$$a \simeq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{wind}(a) = \operatorname{wind}(b).$$