Resolvente y espectrum

Sea A una álgebra de Banach con unidad e.

Definición. Para $a \in A$, el *conjunto resolvente* de a es

$$RS(a) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon a - \lambda e \in \operatorname{Inv}(A)\}.$$

La *función resolvente* $R_a\colon RS(a) \to A$ se define por

$$R_a(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}.$$

El *espectrum* de a es el conjunto $\operatorname{sp}(a) := \mathbb{C} \setminus RS(a)$. El *radio espectral* de a es

$$r(a) := \sup\{|\lambda|\colon \lambda \in \operatorname{sp}(a)\}.$$

1. Para todo $a \in A$, $\quad \operatorname{sp}(a)$ es cerrado.

2. La función resolvente es continua.

3. Identidad de Gelfand. Para todos $\lambda, \mu \in RS(a)$,

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda - \mu) R_a(\lambda) R_a(\mu).$$

4. Todos los valores de la función resolvente conmutan entre sí:

$$R_a(\lambda) R_a(\mu) = R_a(\mu) R_a(\lambda) \qquad (\lambda, \mu \in RS(a)).$$

5. $r(a) \leqslant \|a\|$.

6. $R_a(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$.

7. Para $a \in A$, la función resolvente R_a es holomorfa sobre $RS(a)$. Calcular las series para R_a en el punto ∞ y en cualquier punto $\lambda_0 \in RS(a)$.

8. Teorema. Para todo $a \in A$, $\quad \operatorname{sp}(a) \neq \varnothing$.

9. Teorema (fórmula del radio espectral).

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|a^n\|}.$$