

Operador de multiplicación y sus propiedades

Definición (operador de multiplicación). Sea $a \in L_\infty(\mathbb{T})$. El operador de multiplicación por la función a , $M_a: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$, se define mediante la siguiente fórmula:

$$(M_a f)(x) := a(x)f(x) \quad (x \in \mathbb{T}, f \in L_2(\mathbb{T})).$$

1. $\|M_a\| = \|a\|_\infty$.
2. Para todos $a, b \in L_\infty(\mathbb{T})$, $M_{ab} = M_a M_b$.
3. Definir ess inf análogamente a ess sup (vease le definición de norma-supremo).
4. $\text{ess inf}_{t \in \mathbb{T}} |a(t)| = 0 \iff 0 \in \mathcal{ER}(a)$.
5. **Lema.** M_a es invertible $\iff \text{ess inf}_{t \in \mathbb{T}} |a(t)| > 0$.
6. **Teorema.** $\text{sp}(M_a) = \mathcal{ER}(a)$.
7. M_a es normal.
8. $\text{clos}(W(M_a)) = \text{conv}(\mathcal{ER}(a))$.