

Matrices de Toeplitz

Egor Maximenko

ESFM del IPN

18 de junio de 2009

Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Circunferencia unitaria

La circunferencia \mathbb{T} con medida normalizada

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad \mu_{\mathbb{T}}(S) := \frac{1}{2\pi} \mu\{x \in [0, 2\pi) : e^{ix} \in S\}.$$

La medida $\mu_{\mathbb{T}}$ es “normalizada”: $\mu_{\mathbb{T}}(\mathbb{T}) = 1$
e invariante bajo rotaciones: $\mu_{\mathbb{T}}(\tau S) = \mu_{\mathbb{T}}(S) \quad \forall \tau \in \mathbb{T}$.

Circunferencia unitaria

La circunferencia \mathbb{T} con medida normalizada

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad \mu_{\mathbb{T}}(S) := \frac{1}{2\pi} \mu\{x \in [0, 2\pi) : e^{ix} \in S\}.$$

La medida $\mu_{\mathbb{T}}$ es “normalizada”: $\mu_{\mathbb{T}}(\mathbb{T}) = 1$
e invariante bajo rotaciones: $\mu_{\mathbb{T}}(\tau S) = \mu_{\mathbb{T}}(S) \quad \forall \tau \in \mathbb{T}$.

\mathbb{T} como el segmento $[-\pi, \pi]$ con extremos pegados

A cada función $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ le corresponde la función $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$,
 $g(x) := f(e^{ix})$, que cumple $g(-\pi) = g(\pi)$.

Coeficientes de Fourier

Espacio $L^1(\mathbb{T})$

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| d\mu_{\mathbb{T}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})| dx.$$

Coefficientes de Fourier

Espacio $L^1(\mathbb{T})$

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| d\mu_{\mathbb{T}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})| dx.$$

Definición

Para cualquier función $f \in L^1(\mathbb{T})$, denotemos por f_n ($n \in \mathbb{Z}$) sus **coeficientes de Fourier**:

$$f_n := \int_{\mathbb{T}} t^{-n} f(t) d\mu_{\mathbb{T}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(e^{ix}) dx.$$

Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Matrices de Toeplitz

Definición

La matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se llama **matriz de Toeplitz** si cada diagonal paralela a la diagonal principal, es constante:

$$A_{j+s,k+s} = A_{j,k} \quad \text{para todos posibles } j, k, s.$$

Denotemos por a_k al valor común de los elementos de la k -ésima diagonal. Entonces

$$A = (a_{j-k})_{j,k=1}^n.$$

Ejemplo ($n = 4$)

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Función generadora

a_j fijos, $n \rightarrow \infty$

Habitualmente la sucesión $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ esta dada y fija, y se estudian las propiedades de $T_n(a)$ cuando n es muy grande, i.e. el **comportamiento asintótico** de $T_n(a)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Función generadora

a_j fijos, $n \rightarrow \infty$

Habitualmente la sucesión $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ esta dada y fija, y se estudian las propiedades de $T_n(a)$ cuando n es muy grande, i.e. el **comportamiento asintótico** de $T_n(a)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

a_k como coeficientes de Fourier de una función

Por lo común, los números a_k tienden rapidamente a cero y se pueden ver como coeficientes de Fourier de una función $a \in L^1(\mathbb{T})$.

Función generadora

a_j fijos, $n \rightarrow \infty$

Habitualmente la sucesión $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ esta dada y fija, y se estudian las propiedades de $T_n(a)$ cuando n es muy grande, i.e. el **comportamiento asintótico** de $T_n(a)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

a_k como coeficientes de Fourier de una función

Por lo común, los números a_k tienden rápidamente a cero y se pueden ver como coeficientes de Fourier de una función $a \in L^1(\mathbb{T})$.

Definición

Para $a \in L^1(\mathbb{T})$ y $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$T_n(a) := (a_{j-k})_{j,k=1}^n,$$

La función a se llama la **función generadora** o el **símbolo** de las matrices $T_1(a)$, $T_2(a)$, $T_3(a)$, ...

Clases de símbolos

Aunque la condición $a \in L^1(\mathbb{T})$ es suficiente para definir a_n y $T_n(a)$, habitualmente se consideran condiciones más fuertes.

Clases de símbolos

Aunque la condición $a \in L^1(\mathbb{T})$ es suficiente para definir a_n y $T_n(a)$, habitualmente se consideran condiciones más fuertes.

Clases de símbolos más usadas:

- $L^\infty(\mathbb{T})$, funciones esencialmente acotadas.

Clases de símbolos

Aunque la condición $a \in L^1(\mathbb{T})$ es suficiente para definir a_n y $T_n(a)$, habitualmente se consideran condiciones más fuertes.

Clases de símbolos más usadas:

- $L^\infty(\mathbb{T})$, funciones esencialmente acotadas.
- $C(\mathbb{T})$, funciones continuas.

Clases de símbolos

Aunque la condición $a \in L^1(\mathbb{T})$ es suficiente para definir a_n y $T_n(a)$, habitualmente se consideran condiciones más fuertes.

Clases de símbolos más usadas:

- $L^\infty(\mathbb{T})$, funciones esencialmente acotadas.
- $C(\mathbb{T})$, funciones continuas.
- **Álgebra de Wiener** $W(\mathbb{T}) := \{f \in C(\mathbb{T}) : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k| < +\infty\}$.

Si $a \in W(\mathbb{T})$, entonces $a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k t^k$.

Clases de símbolos

Aunque la condición $a \in L^1(\mathbb{T})$ es suficiente para definir a_n y $T_n(a)$, habitualmente se consideran condiciones más fuertes.

Clases de símbolos más usadas:

- $L^\infty(\mathbb{T})$, funciones esencialmente acotadas.
- $C(\mathbb{T})$, funciones continuas.
- **Álgebra de Wiener** $W(\mathbb{T}) := \{f \in C(\mathbb{T}) : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k| < +\infty\}$.

Si $a \in W(\mathbb{T})$, entonces $a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k t^k$.

- **Polinomios de Laurent:** $a(t) = \sum_{k=-q}^p a_k t^k$.

Matrices de Toeplitz de banda

Cuando el símbolo a es un polinomio de Laurent, $a(t) = \sum_{k=-q}^p a_k t^k$,

el número de diagonales no nulas es finito,

i.e. para todo n la matriz $T_n(a)$ es una **matriz de banda**.

Ejemplo ($a(t) = -3t^{-1} + 2i + (4 - i)t + t^2$)

$$T_6(a) = \begin{pmatrix} 2i & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 - i & 2i & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 - i & 2i & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 - i & 2i & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 - i & 2i & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 - i & 2i \end{pmatrix}.$$

Matrices de Toeplitz hermitianas

Si la función a es real, entonces $a_{-k} = \bar{a}_k$ para todos $k \in \mathbb{Z}$,
y para todo n la matriz $T_n(a)$ es **hermitiana**,
i.e. igual a su propia transpuesta conjugada.

Ejemplo

$$a(e^{ix}) = \begin{cases} \pi - x, & x \in [0, \pi]; \\ -\pi - x, & x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Entonces

$$T_5(a) = \begin{pmatrix} 0 & -i & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{3} & -\frac{i}{4} \\ i & 0 & -i & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{3} \\ \frac{i}{2} & i & 0 & -i & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{3} & \frac{i}{2} & i & 0 & -i \\ \frac{i}{4} & \frac{i}{3} & \frac{i}{2} & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Estimaciones rudas para las normas

Muchas propiedades de las matrices de Toeplitz se pueden formular naturalmente en términos de a .

Teorema (Cotas superiores para las normas)

Para todos $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$\|T_n(a)\| \leq \|a\|_\infty.$$

Para todos $a \in L^1(\mathbb{T})$ y $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$\|T_n(a)\| \leq n \|a\|_1.$$

Problema no solucionado

Para $a \in L^1(\mathbb{T}) \setminus L^\infty(\mathbb{T})$, $\|T_n(a)\| \sim ?$

(¿con qué velocidad las normas $\|T_n(a)\|$ tienden al infinito?)

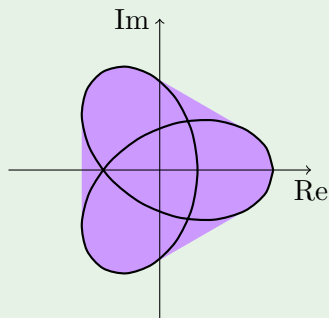
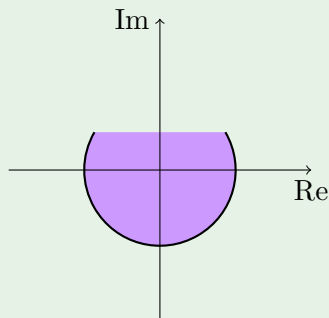
Estimación ruda para los espectros

Teorema

$$\text{sp}(T_n(a)) \subset \text{conv}(\text{EssRange}(a)),$$

donde $\text{EssRange}(a)$ es el rango esencial de a , conv es la envoltura convexa.

Ejemplos ($\text{EssRange}(a)$ y $\text{conv}(\text{EssRange}(a))$)



Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

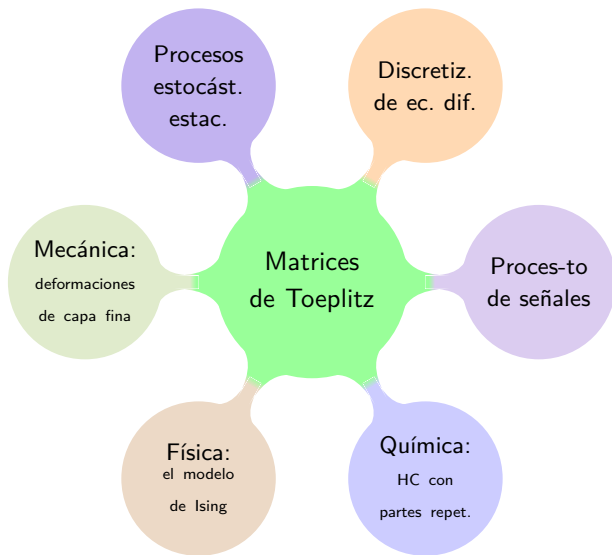
2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Algunas áreas donde surgen matrices de Toeplitz



Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Procesos estocásticos estacionarios

Definición (procesos estocásticos estacionarios)

Sea $\{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ un proceso estocástico de tiempo discreto. El proceso $\{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es **estacionario (en sentido estricto)** si su distribución conjunta de probabilidad es invariante respecto a desplazamientos en el tiempo.

Ejemplos

- el ruido blanco
- el esquema de Bernoulli
- modelo autorregresivo de media móvil (“ARMA” en inglés)

Procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio

Definición

El proceso $\{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es **estacionario en sentido amplio** (o **en sentido débil**) si su media y covarianza son invariantes respecto a desplazamientos en tiempo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_j &= \mathbb{E} X_k \quad \forall k, j \in \mathbb{Z}; \\ \text{Cov}(X_{j+s}, X_{k+s}) &= \text{Cov}(X_j, X_k) \quad \forall k, j, s \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En este caso $\text{Cov}(X_j, X_k)$ depende sólo de $j - k$: $\text{Cov}(X_j, X_k) = a_{j-k}$, y la **matriz de covarianzas** $(\text{Cov}(X_j, X_k))_{j,k=1}^n$ es una matriz de Toeplitz.

Procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio

Definición

El proceso $\{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es **estacionario en sentido amplio** (o **en sentido débil**) si su media y covarianza son invariantes respecto a desplazamientos en tiempo:

$$\begin{aligned} E X_j &= E X_k \quad \forall k, j \in \mathbb{Z}; \\ \text{Cov}(X_{j+s}, X_{k+s}) &= \text{Cov}(X_j, X_k) \quad \forall k, j, s \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En este caso $\text{Cov}(X_j, X_k)$ depende sólo de $j - k$: $\text{Cov}(X_j, X_k) = a_{j-k}$, y la **matriz de covarianzas** $(\text{Cov}(X_j, X_k))_{j,k=1}^n$ es una matriz de Toeplitz.

Nota

Todo proceso estacionario en sentido estricto es también un proceso estacionario en sentido amplio.

Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- **Discretización de ecuaciones diferenciales**

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Discretización de ecuaciones diferenciales

Problema de valor de frontera

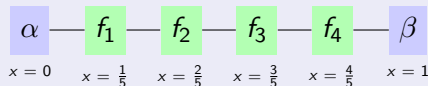
Encontrar $f \in C^2([0, 1])$ tal que

$$\begin{cases} f''(x) = g(x), & x \in (0, 1); \\ f(0) = \alpha; \\ f(1) = \beta. \end{cases}$$

Partición del segmento

Dividimos el segmento $[0, 1]$ en $n + 1$ partes:

$$x_k := \frac{k}{n+1}, \quad f_k := f(x_k), \quad g_k := g(x_k).$$



Discretización de ecuaciones diferenciales

Aproximación de las derivadas

Las derivadas se pueden aproximar con diferencias finitas:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Discretización de ecuaciones diferenciales

Aproximación de las derivadas

Las derivadas se pueden aproximar con diferencias finitas:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Discretización del problema

Usando la aproximación $f''(x_k) \approx \frac{f_{k-1} - 2f_k + 2f_{k+1}}{h^2}$ y las condiciones de frontera, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales algebraicas:

$$\begin{cases} -2f_1 + f_2 &= h^2 g_1 - \alpha; \\ f_1 - 2f_2 + f_3 &= h^2 g_2; \\ f_2 - 2f_3 + f_4 &= h^2 g_3; \\ f_3 - 2f_4 &= h^2 g_4 - \beta; \end{cases}$$

Discretización de ecuaciones diferenciales

Discretización del problema

Usando la aproximación $f''(x_k) \approx \frac{f_{k-1} - 2f_k + 2f_{k+1}}{h^2}$ y las condiciones de frontera, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales algebraicas:

$$\begin{cases} -2f_1 + f_2 &= h^2 g_1 - \alpha; \\ f_1 - 2f_2 + f_3 &= h^2 g_2; \\ f_2 - 2f_3 + f_4 &= h^2 g_3; \\ f_3 - 2f_4 &= h^2 g_4 - \beta; \end{cases}$$

Discretización del problema (en forma matricial)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 g_1 - \alpha \\ h^2 g_2 \\ h^2 g_3 \\ h^2 g_4 - \beta \end{pmatrix}.$$

La matriz del sistema es $T_4(a)$ con $a(t) = t^{-1} - 2 + t$.

Discretización de ecuaciones diferenciales

Discretización del problema (en forma matricial)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 g_1 - \alpha \\ h^2 g_2 \\ h^2 g_3 \\ h^2 g_4 - \beta \end{pmatrix}.$$

La matriz del sistema es $T_4(a)$ con $a(t) = t^{-1} - 2 + t$.

Nota

A los problemas de frontera más complicados les corresponden matrices de Toeplitz con mayor número de diagonales no nulas o algunas generalizaciones de las matrices de Toeplitz.

Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- **Matrices de Toeplitz tridiagonales**
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Matrices de Toeplitz tridiagonales

Consideremos el caso muy simple pero importante:

$$a(t) = a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1t^1 \quad (a_1, a_{-1} \neq 0)$$

Las matrices correspondientes tienen tres diagonales no nulas:

$$T_5(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & a_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Los valores y vectores propios de estas matrices se pueden escribir en forma explícita.

Matrices de Toeplitz tridiagonales

Teorema

Sea $a(t) = a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1t$, donde $a_1a_{-1} \neq 0$.
Entonces los valores propios de $T_n(a)$ son

$$\lambda_k = a_0 + 2\sqrt{a_1a_{-1}} \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (1 \leq k \leq n),$$

y los vectores propios correspondientes son

$$v_k = \left(\left(\sqrt{\frac{a_1}{a_{-1}}} \right)^j \sin \frac{kj\pi}{n+1} \right)_{j=1}^n.$$

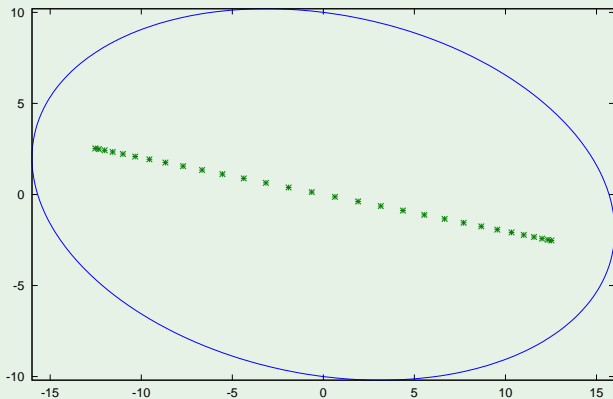
Nota geométrica

La curva $z = a(e^{ix})$, $x \in [-\pi, \pi]$, es la elipse con focos $a_0 \pm 2\sqrt{a_1a_{-1}}$, y los puntos λ_k están en el segmento que une los focos.

Matrices de Toeplitz tridiagonales

Ejemplo: el rango del símbolo y espectro

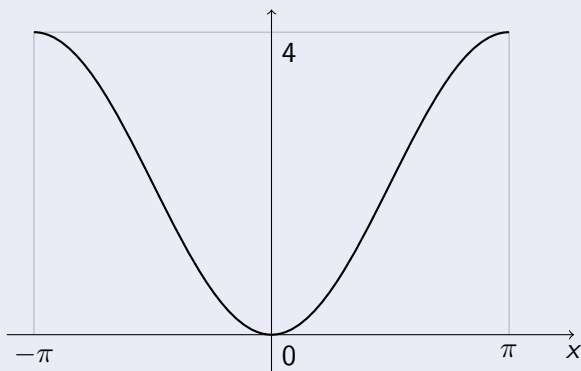
Ejemplo ($\text{Range}(a)$ y $\text{sp}(T_{30}(a))$) para $a = t^{-1} + (4 + i)t$



Matrices de Toeplitz tridiagonales hermitianas

El estudio de estas matrices se puede reducir a un caso particular:

$$a(t) = 2 - t - t^{-1}, \quad g(x) := a(e^{ix}) = 2 - 2 \cos x = 4 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

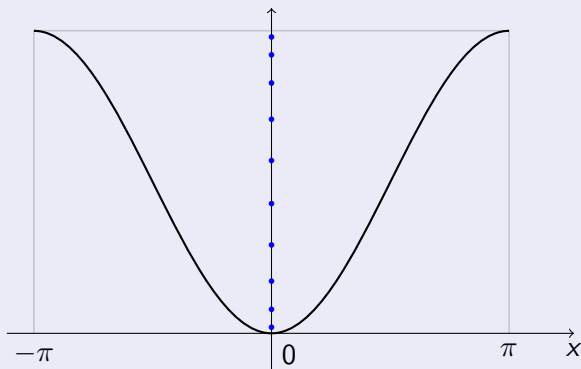


Matrices de Toeplitz tridiagonales hermitianas

Valores propios

Para $a(t) = 2 - t - t^{-1}$ y $g(x) := a(e^{ix}) = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$,

$$\lambda_k(T_n(a)) = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} = g\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

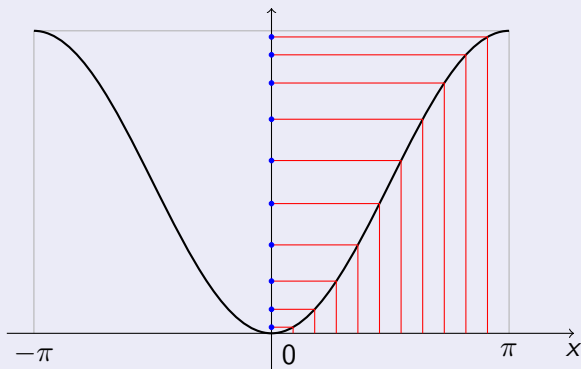


Matrices de Toeplitz tridiagonales hermitianas

Valores propios

Para $a(t) = 2 - t - t^{-1}$ y $g(x) := a(e^{ix}) = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$,

$$\lambda_k(T_n(a)) = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} = g\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$



Matrices de Toeplitz tridiagonales hermitianas

Vectores propios

Fórmulas y dibujos para los vectores propios de $T_n(2 - t - t^{-1})$:

$$x_k^{(n)} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{kj\pi}{n+1} \right)_{j=1}^n .$$

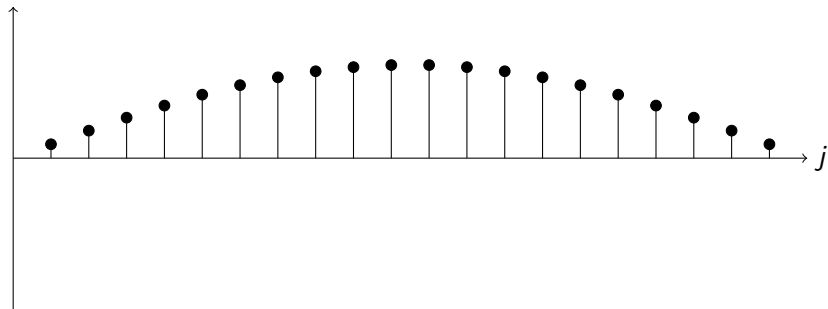


Matrices de Toeplitz tridiagonales hermitianas

Vectores propios

Fórmulas y dibujos para los vectores propios de $T_n(2 - t - t^{-1})$:

$$x_1^{(20)} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{j\pi}{21} \right)_{j=1}^{20} .$$

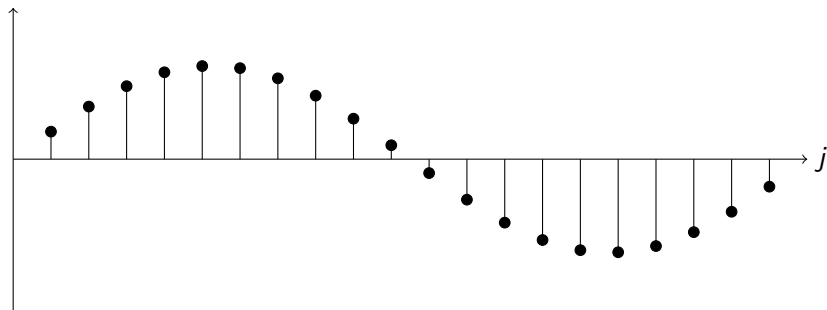


Matrices de Toeplitz tridiagonales hermitianas

Vectores propios

Fórmulas y dibujos para los vectores propios de $T_n(2 - t - t^{-1})$:

$$x_2^{(20)} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{2j\pi}{21} \right)_{j=1}^{20} .$$

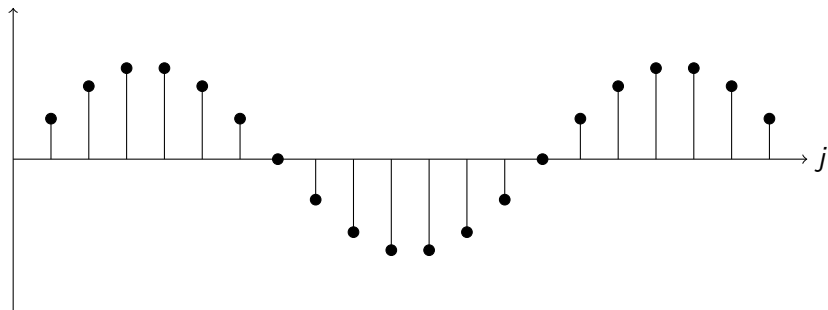


Matrices de Toeplitz tridiagonales hermitianas

Vectores propios

Fórmulas y dibujos para los vectores propios de $T_n(2 - t - t^{-1})$:

$$x_3^{(20)} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{3j\pi}{21} \right)_{j=1}^{20}.$$

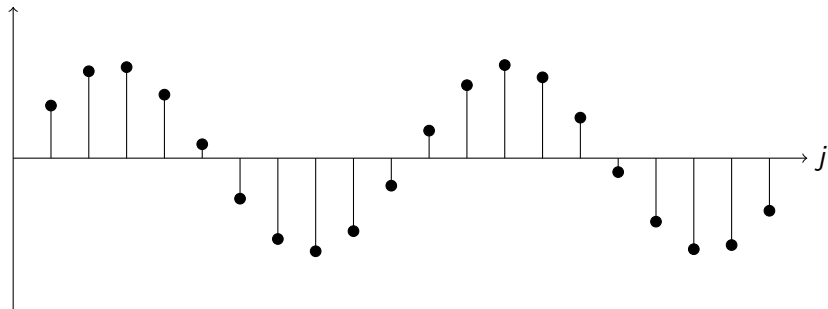


Matrices de Toeplitz tridiagonales hermitianas

Vectores propios

Fórmulas y dibujos para los vectores propios de $T_n(2 - t - t^{-1})$:

$$x_4^{(20)} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{4j\pi}{21} \right)_{j=1}^{20}.$$

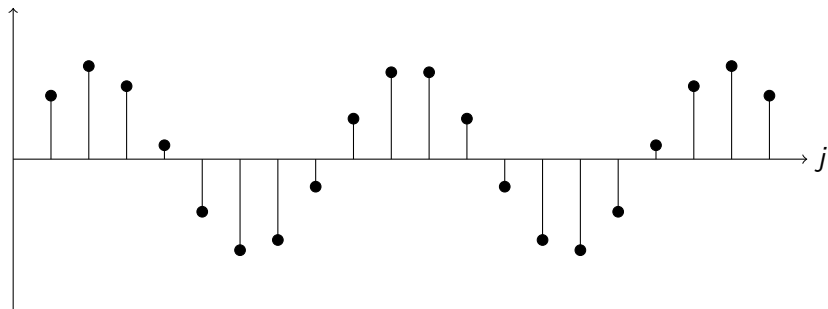


Matrices de Toeplitz tridiagonales hermitianas

Vectores propios

Fórmulas y dibujos para los vectores propios de $T_n(2 - t - t^{-1})$:

$$x_5^{(20)} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{5j\pi}{21} \right)_{j=1}^{20}.$$



Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- **Invertibilidad asintóticamente uniforme**
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Invertibilidad asintoticamente uniforme

Definición

La sucesión de matrices $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es **invertible asintoticamente uniforme (estable)** si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n^{-1}\| < \infty.$$

Aquí $\|A_n^{-1}\| := \infty$ si A_n no es invertible.

Invertibilidad asintóticamente uniforme

Definición

La sucesión de matrices $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es **invertible asintóticamente uniforme (estable)** si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n^{-1}\| < \infty.$$

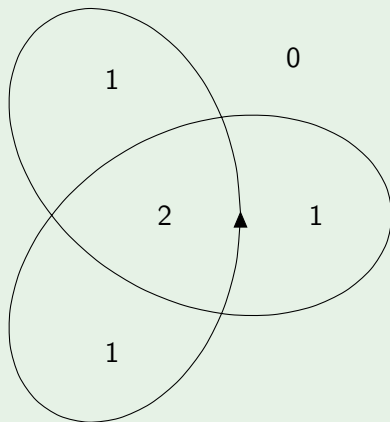
Aquí $\|A_n^{-1}\| := \infty$ si A_n no es invertible.

¿Cuándo la sucesión $T_n(a)$ es estable?

Para formular la respuesta, necesitamos una noción auxiliar, el **número de vueltas** (“winding number” en inglés).

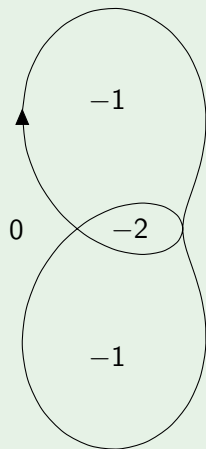
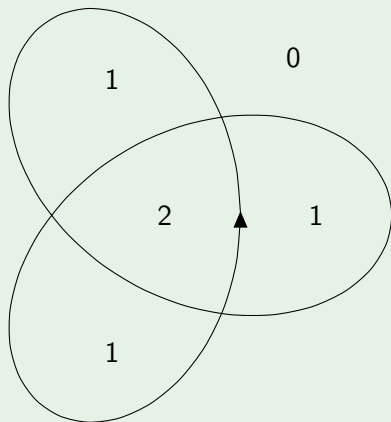
Número de vueltas: ejemplos

Ejemplo (valores de $\text{wind}(a, \lambda)$)



Número de vueltas: ejemplos

Ejemplo (valores de $\text{wind}(a, \lambda)$)



Número de vueltas: definición formal

Sea $a \in C(\mathbb{T})$, $a(t) \neq 0$ para todos $t \in \mathbb{T}$. Entonces existe una función continua $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$a(e^{ix}) = |a(e^{ix})|e^{if(x)} \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

La función f se llama **argumento continuo** de la función $x \mapsto a(e^{ix})$.

Número de vueltas: definición formal

Sea $a \in C(\mathbb{T})$, $a(t) \neq 0$ para todos $t \in \mathbb{T}$. Entonces existe una función continua $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$a(e^{ix}) = |a(e^{ix})|e^{if(x)} \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

La función f se llama **argumento continuo** de la función $x \mapsto a(e^{ix})$.

Definición

Sea $a \in C(\mathbb{T})$, $a(t) \neq 0$ para todos $t \in \mathbb{T}$.

El **número de vueltas** de la función a alrededor del punto 0 se define como

$$\text{wind}(a) := \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi},$$

donde la función f es un argumento continuo de la función $x \mapsto a(e^{ix})$.

Número de vueltas: definición formal

Definición

Sea $a \in C(\mathbb{T})$, $a(t) \neq 0$ para todos $t \in \mathbb{T}$.

El **número de vueltas** de la función a alrededor del punto 0 se define como

$$\text{wind}(a) := \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi},$$

donde la función f es un argumento continuo de la función $x \mapsto a(e^{ix})$.

Definición

Sea $a \in C(\mathbb{T})$, $a(t) \neq \lambda$ para todos $t \in \mathbb{T}$.

El número de vueltas de a alrededor del punto λ se define como

$$\text{wind}(a, \lambda) := \text{wind}(a - \lambda).$$

Invertibilidad asintóticamente uniforme

Teorema

Sea $a \in W(\mathbb{T})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n^{-1}(a)\| < +\infty$.
- $a(t) \neq 0$ para todos $t \in \mathbb{T}$ y $\text{wind}(a) = 0$.

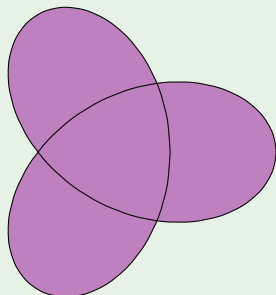
Invertibilidad asintóticamente uniforme

Teorema

Sea $a \in W(\mathbb{T})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n^{-1}(a)\| < +\infty$.
- $a(t) \neq 0$ para todos $t \in \mathbb{T}$ y $\text{wind}(a) = 0$.

Example ($\text{Range}(a)$ y $\{\lambda \in \mathbb{C} : \limsup \|T_n^{-1}(a - \lambda)\| = \infty\}$)



Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintoticamente uniforme
- **Comportamiento promedio de los valores propios**
- Límites de espectros

Comportamiento promedio de los valores propios

Definición

Sean A una matriz hermitiana $n \times n$, $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ sus valores propios, $f: [m, M] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, $\text{sp}(A) \subset [m, M]$.

Entonces la f -traza de A es

$$\sum_{k=1}^n f(\lambda_k(A)) = \text{tr } f(A).$$

Comportamiento promedio de los valores propios

Definición

Sean A una matriz hermitiana $n \times n$, $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ sus valores propios, $f: [m, M] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, $\text{sp}(A) \subset [m, M]$.

Entonces la **f -traza** de A es

$$\sum_{k=1}^n f(\lambda_k(A)) = \text{tr } f(A).$$

Teorema (El primer teorema límite de Szegő)

Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ una función real, $\text{Range}(a) \subset [m, M]$.

Entonces para cada función $f \in C([m, M])$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k(T_n(a))) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a(e^{i\theta})) d\theta.$$

Comportamiento promedio de los valores propios

Teorema (El primer teorema límite de Szegö)

Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ una función real, $\text{Range}(a) \subset [m, M]$.

Entonces para cada función $f \in C([m, M])$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k(T_n(a))) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a(e^{i\theta})) d\theta.$$

Corolario (Densidad límite de los valores propios)

Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ una función real, $\text{Range}(a) \subset [m, M]$.

Entonces para cada segmento $[\alpha, \beta] \subset [m, M]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k: \lambda_k(T_n(a)) \in [\alpha, \beta]\}}{n} = \frac{1}{2\pi} \mu\{x: a(e^{ix}) \in [\alpha, \beta]\}.$$

Comportamiento promedio de los valores propios

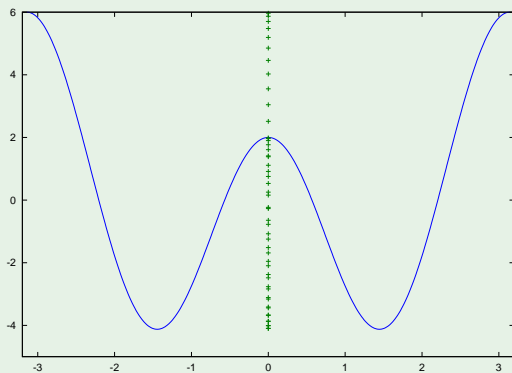
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k: \lambda_k(T_n(a)) \in [\alpha, \beta]\}|}{n} = \frac{1}{2\pi} \mu\{x: a(e^{ix}) \in [\alpha, \beta]\}.$$

Comportamiento promedio de los valores propios

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k: \lambda_k(T_n(a)) \in [\alpha, \beta]\}}{n} = \frac{1}{2\pi} \mu\{x: a(e^{ix}) \in [\alpha, \beta]\}.$$

Ejemplo (Gráfica de $y = a(e^{ix})$ y espectro de $T_n(a)$)

$$a(t) = 2t^{-1} + t^{-1} + t + 2t^2, \quad n = 50$$



Contenido

1 Definiciones

- Circunferencia unitaria y coeficientes de Fourier
- Definición de las matrices de Toeplitz

2 Aplicaciones

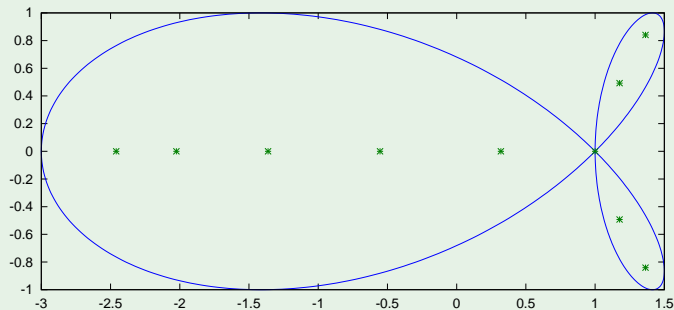
- Procesos estocásticos estacionarios
- Discretización de ecuaciones diferenciales

3 Propiedades

- Matrices de Toeplitz tridiagonales
- Invertibilidad asintóticamente uniforme
- Comportamiento promedio de los valores propios
- Límites de espectros

Límites de espectros

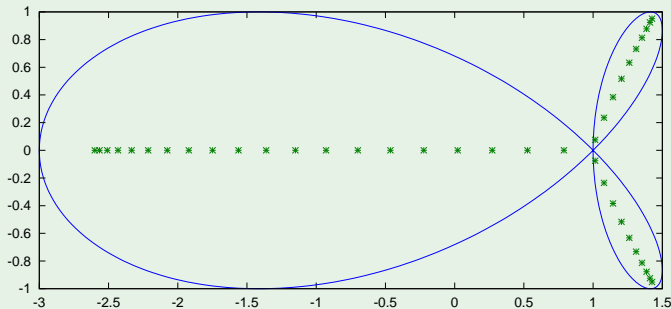
Ejemplo ($\text{Range}(a)$ y $\text{sp}(T_n(a))$ para $a = t^{-1} + t - t^2$)



$n = 10$

Límites de espectros

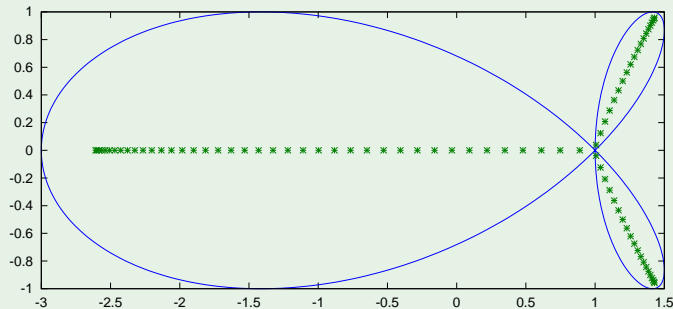
Ejemplo ($\text{Range}(a)$ y $\text{sp}(T_n(a))$ para $a = t^{-1} + t - t^2$)



$n = 40$

Límites de espectros

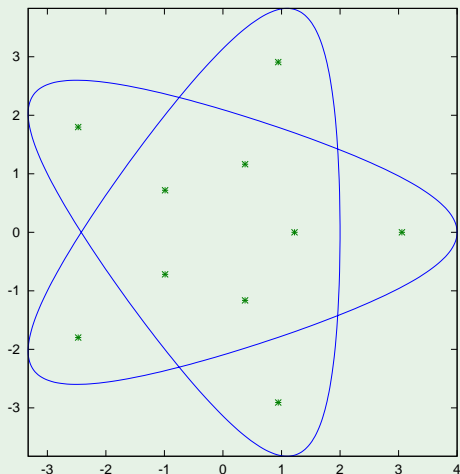
Ejemplo ($\text{Range}(a)$ y $\text{sp}(T_n(a))$ para $a = t^{-1} + t - t^2$)



$n = 80$

Límites de espectros

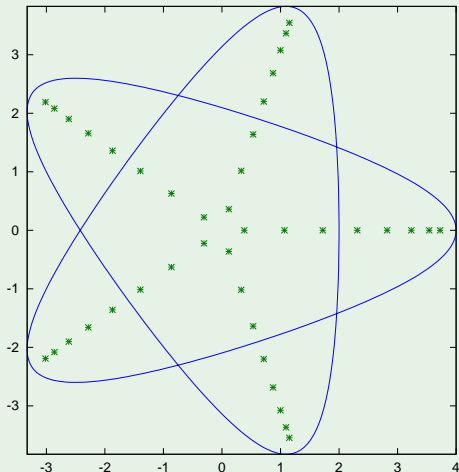
Ejemplo ($\text{Range}(a)$ y $\text{sp}(T_n(a))$ para $a = t^{-2} + t^3$)



$n = 10$

Límites de espectros

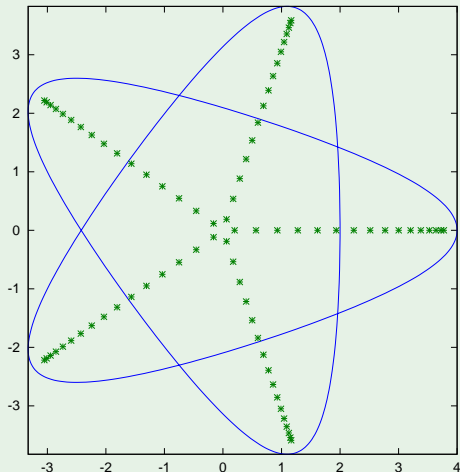
Ejemplo ($\text{Range}(a)$ y $\text{sp}(T_n(a))$ para $a = t^{-2} + t^3$)



$n = 40$

Límites de espectros

Ejemplo ($\text{Range}(a)$ y $\text{sp}(T_n(a))$ para $a = t^{-2} + t^3$)



$n = 80$

Límites de espectros

Teorema (Schmidt y Spitzer, 1960)

Sea $a(t) = \sum_{k=-q}^p a_k t^k$ con $p \geq 1$, $q \geq 1$, $a_p \neq 0$, $a_{-q} \neq 0$.

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ denotemos por $z_1(\lambda), \dots, z_{p+q}(\lambda)$ las raíces del polinomio $\sum_{k=0}^{p+q} a_{k-q} z^k - z^q \lambda$, numeradas en tal manera que

$$|z_1(\lambda)| \geq |z_2(\lambda)| \geq \dots \geq |z_{p+q}(\lambda)|.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sp}(T_n(a)) = \Lambda(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |z_p(\lambda)| = |z_{p+1}(\lambda)|\}.$$

Problema no solucionado

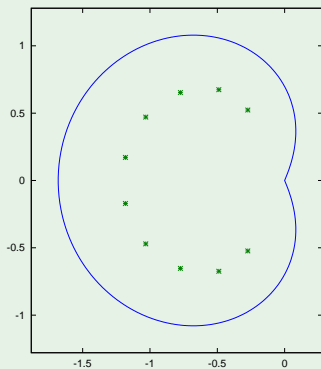
Describir $\Lambda(a)$ (“el esqueleto de a ”) geoméricamente.

Extender el teorema de Schmidt y Spitzer a los símbolos analíticos.

Límites de espectros: el caso no analítico

Ejemplo (Grudsky, Böttcher y Bogoya Ramírez)

El símbolo $a(t) = t^{-1}(1 - t)^{3/4}$ no es analítico en el punto $t = 1$.
Para este símbolo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sp } T_n(a) = \text{Range}(a)$.

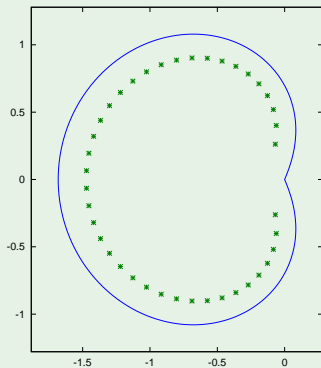


$n = 10$

Límites de espectros: el caso no analítico

Ejemplo (Grudsky, Böttcher y Bogoya Ramírez)

El símbolo $a(t) = t^{-1}(1 - t)^{3/4}$ no es analítico en el punto $t = 1$.
Para este símbolo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sp } T_n(a) = \text{Range}(a)$.

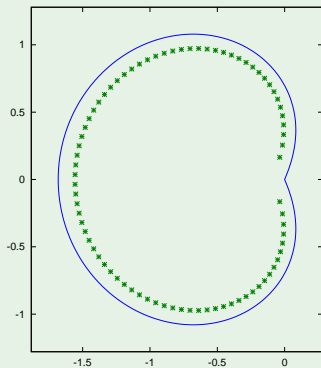


$n = 40$

Límites de espectros: el caso no analítico

Ejemplo (Grudsky, Böttcher y Bogoya Ramírez)

El símbolo $a(t) = t^{-1}(1 - t)^{3/4}$ no es analítico en el punto $t = 1$.
Para este símbolo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sp } T_n(a) = \text{Range}(a)$.



$n = 80$