Rango esencial y rango esencial local

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Esto significa que $\mathcal{F} \subset 2^X$, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra (i.e. $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X) y $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ es una medida (contablemente aditiva). Supongamos que $X \neq \varnothing$, $\mu(X) > 0$ y μ es σ-finita. Denotemos con $M(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ (o brevemente $M(X, \mathcal{F})$) el conjunto de todas funciones de X en $\mathbb{C}$ medibles respecto a $\mathcal{F}$.

Definición (igualdad casi en todas partes). Sean $f, g \in M(X, \mathcal{F})$. Se dice que f y g son *iguales casi en todas partes respecto a la medida* μ y se escribe "$f \overset{\text{ctp}\,\mu}{=} g$" o brevemente "$f \overset{\mu}{=} g$" si

$$\mu\{x \in X\colon f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Análogamente se definen las relaciones $\overset{\mu}{\leqslant}$, $\overset{\mu}{\geqslant}$, etc.

1. Sea $\bowtie$ una relación binaria sobre $\mathbb{C}$. Definir la relación $\overset{\mu}{\bowtie}$. Probar que $\overset{\mu}{\bowtie}$ hereda las siguientes propiedades de $\bowtie$: reflexividad, simetría y transitividad.

Definición (norma-supremo). Para cada función medible $f \in M(X, \mathcal{F})$ pongamos

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geqslant 0\colon |f| \overset{\mu}{\leqslant} c\} = \inf\{c \geqslant 0 \mid \mu\{x \in X\colon |f(x)| > c\} = 0\}.$$

2. Para $f \in M(X, \mathcal{F})$,

$$\|f\|_\infty = \sup\{c \geqslant 0\colon \mu\{x \in X\colon\ |f(x)| \geqslant c\} > 0\}.$$

3. $\|f\|_\infty = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \overset{\mu}{=} 0.$

Definición (rango esencial). Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función medible. El *rango esencial* de f consiste en todos los números $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que para cada vecinidad U de λ la función f toma valores en U sobre un conjunto de medida positiva:

$$\mathcal{ER}(f) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu\{x \in X\colon |f(x) - \lambda| < \varepsilon\} > 0\}.$$

Definición (funciones esencialmente acotadas). Una función $f\colon X \to \mathbb{C}$ se llama *esencialmente acotada* si f es medible y $\|f\|_\infty < +\infty$, i.e. $\exists c \in [0, +\infty)\colon\ |f| \overset{\mu}{\leqslant} c$. El conjunto de todas las funciones esencialmente acotadas se denota con $L_\infty(X, \mu, \mathbb{C})$ o brevemente $L_\infty(X, \mu)$:

$$L_\infty(X, \mu, \mathbb{C}) := \{f \in M(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})\colon \|f\|_\infty < +\infty\}.$$

4. Para $f \in M(X, \mathcal{F})$, $\quad \|f\|_\infty = \sup\{|\lambda|\colon \lambda \in \mathcal{ER}(f)\}$.

5. Para $f \in L_\infty(X, \mathcal{F})$, el conjunto $\mathcal{ER}(f)$ es compacto y no vacío.

Rango esencial local

Ahora consideremos el espacio de medida $(\mathbb{T}, \mathcal{F}_\mathbb{T}, \mu_\mathbb{T})$, donde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$,

$$\mathcal{F}_\mathbb{T} := \{A \subset \mathbb{T} \colon \{x \in [0, 2\pi) \colon e^{ix} \in A\} \text{ es Lebesgue-medible}\}$$

y

$$\mu_\mathbb{T}(A) := \frac{1}{2\pi} \mu_\mathbb{R}\{x \in [0, 2\pi) \colon e^{ix} \in A\}.$$

Aquí el conjunto $[0, 2\pi)$ se considere con la medida de Lebesgue. A veces dicen que esta medida μ es la *medida normalizada sobre* $\mathbb{T}$.

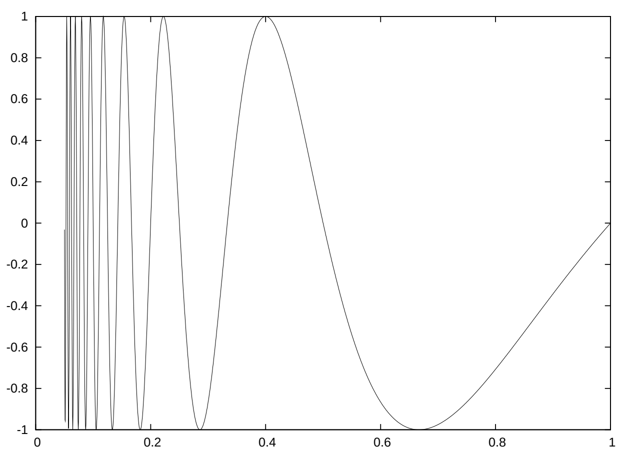
Definición (rango esencial local). Para $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ y $t_0 \in \mathbb{T}$, definimos *el rango esencial de la función f en el punto t_0*:

$$\mathcal{ER}(f, t_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \quad \forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \quad \mu_\mathbb{T}\{t \in \mathbb{T} \colon |t - t_0| < \delta \ \wedge \ |f(t) - \lambda| < \varepsilon\} > 0\}.$$

6. Para $f \in C(\mathbb{T})$ y $t_0 \in \mathbb{T}$, $\quad \mathcal{ER}(f, t_0) = \{f(t_0)\}$.

7. Encontrar $\mathcal{ER}(f, x_0)$ para la función $f \in L_\infty([0, 1])$ y el punto $x_0 = 0$ donde

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi/x), & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



8. Para $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ y $t_0 \in \mathbb{T}$, el conjunto $\mathcal{ER}(f, t_0)$ es compacto y no vacío.

9. Sean $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ una función medible y $t_0 \in \mathbb{T}$. Definir la "norma esencial local" $\mathcal{NL}(f, t_0)$ provar para $\mathcal{NL}(f, t_0)$ el análogo de la Afirmación 2.

10. Para $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ y $t_0 \in \mathbb{T}$, $\quad \mathcal{NL}(f, t_0) = \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in \mathcal{ER}(f, t_0)\}$.

11. Para $f \in L_\infty(\mathbb{T})$, $\quad \mathcal{ER}(f) = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{ER}(f, t)$.

12. Para $f \in C(\mathbb{T})$, $\quad \mathcal{ER}(f) = \{f(t) \colon t \in \mathbb{T}\} \quad$ y $\quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|$.