Álgebra de las funciones continuamente diferenciables k veces

Definición. $C^k([0,1])$ consiste en todas las funciones $[0,1] \to \mathbb{C}$ continuamente diferenciables k veces.

1. Consideremos la siguiente norma en el espacio $C^2([0,1])$:

$$\|a\| := \|a\|_\infty + \|a'\|_\infty + \|a''\|_\infty.$$

Encontrar funciones $a, b \in C^2([0,1])$ tales que $\|ab\| > \|a\| \cdot \|b\|$.

Definición (la norma natural en $C^k([0,1])$). Para $f \in C^k([0,1])$,

$$\|f\|_{C^k([0,1])} := \sum_{j=0}^{k} \frac{\|f^{(j)}\|_\infty}{j!} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \frac{1}{2}\|f''\|_\infty + \ldots + \frac{1}{k!}\|f^{(k)}\|_\infty.$$

2. Mostrar que la norma $\|\cdot\|_{C^k([0,1])}$ cumple la propiedad $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ y es equivalente a la norma $\|a\|_\infty + \|a'\|_\infty + \ldots + \|a^{(k)}\|_\infty$.

3. Mostrar que $C^k([0,1])$ para $k \geqslant 1$ no es C^*-álgebra.

4. Lema. Sea J un subespacio lineal en $C^k([0,1])$ tal que $J \cdot C^k([0,1]) \subset J$. Supongamos que para cada punto $t \in K$ existe una función $g_t \in J$ y una vecindad U_t de t tales que $|g_t(u)| \geqslant 1$ para todos $u \in U_t$. Entonces $J = C^k([0,1])$. Sugerencia: mostrar que existe un elemento $h \in J$ tal que $h \geqslant 0$ y $\inf_{t \in K} h(t) > 0$.

5. Teorema. El espacio $\mathcal{M}(C^k([0,1]))$ de funcionales multiplicativos sobre $C^k([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]$.

6. Construir un ideal cerrado en $C^1([0,1])$ que no sea intersección de ideales maximales.

Funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{T}$

Notación. Para cada función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ denotemos con $\tilde{f}$ la función $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definida mediante

$$\tilde{f}(x) = f(e^{ix}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Definición. $C^k(\mathbb{T})$ consiste en todas las funciones $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tales que $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R})$. La norma en $C^k(\mathbb{T})$ es definida por

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{T})} := \|\tilde{f}\|_{C^k(\mathbb{R})}.$$

7. El espacio $\mathcal{M}(C^k(\mathbb{T}))$ de funcionales multiplicativos sobre $C^k(\mathbb{T})$ es homeomorfo a $\mathbb{T}$.