Operador de convolución

Operación de convolución en $L^1(G)$ y el álgebra de Wiener

Sean G un grupo conmutativo localmente compacto y μ una medida de Haar en G. Para la operación en G usamos la notación aditiva. En lugar de $L^p(G,\mu)$ escribimos simplemente $L^p(G)$.

Definición (operación de convolución en $L^1(G)$). Para todas $f,g \in L^1(G)$, la función $f * g$ se define mediante la siguiente fórmula:

$$(f * g)(x) := \int_G f(x-y)g(y)d\mu(y) \qquad (x \in G). \tag{1}$$

La función $f * g$ se define a través de la fórmula (1) también en algunos otros casos: $f,g \in L^2(G)$; $f \in L^1(G)$ y $g \in L^2(G)$, etc.

Lema para el siguiente ejercicio (sin demostración). Sea f una función μ-medible, Entonces la función $(x,y) \mapsto f(x-y)$ es $\mu \times \mu$-medible.

1. Para $f,g \in L^1(G)$, $\quad f * g \in L^1(G)$ y $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

2. Para $f,g \in L^1(G)$, $\quad f * g = g * f$.

3. Para $f,g,h \in L^1(G)$, $\quad (f * g) * h = f * (g * h)$.

4. Para el caso cuando G es discreto, construir un elemento $f \in L^1(G)$ tal que $f * g = g$ para todos $g \in L^1(G)$. Sin demostración: si G no es discreto, no existe elemento con esta propiedad.

Teorema. El grupo $L^1(G)$ con operación de convolución es una álgebra conmutativa de Banach. Esta álgebra tiene la unidad sí y solo sí el grupo G es discreto. Esta álgebra se llama *álgebra de convolución del grupo G*.

Ahora consideramos esta misma álgebra en otra forma (y introducimos la unidad en el caso cuando G no es discreta).

5. Transformada de Fourier convierte la convolución a multiplicación. Para todas $f,g \in L^1(G)$, $\quad \mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$, i.e.

$$\mathcal{F}(f * g)(\varphi) = (\mathcal{F}f)(\varphi) \cdot (\mathcal{F}g)(\varphi) \qquad (\varphi \in \hat{G}).$$

Definición (álgebra de Wiener). 1. El caso cuando G es discreto, i.e. $\hat{G}$ es compacto. El *álgebra de Wiener* $W(\hat{G})$ del grupo $\hat{G}$ consiste en todos los elementos del $L^\infty(\hat{G})$ que tienen la forma $a = \mathcal{F}f$ con $f \in L^1(G)$. La norma en $W(\hat{G})$ se define por la fórmula

$$\|\mathcal{F}f\|_W := \|f\|_1 \qquad (f \in L^1(G)).$$

2. El caso cuando G no es discreto, i.e. $\hat{G}$ no es compacto. $W(\hat{G})$ consiste en todos los elementos del $L^\infty(\hat{G})$ que tienen la forma $a = c + \mathfrak{F}f$ con $c \in \mathbb{C}$ y $f \in L^1(G)$. La norma se define mediante

$$\|c + \mathfrak{F}f\|_W := |c| + \|f\|_1 \qquad (c \in \mathbb{C},\ f \in L^1(G)).$$

6. Mostrar que en ambos casos ($\hat{G}$ es compacto o no lo es) $W(\hat{G})$ es una álgebra de Banach conmutativa con unidad.

Operador de convolución en $L^2(G)$

7. Para $f, g \in L^2(G)$, $\quad f * g \in L^\infty$ y $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$.
(Sin demostración: en este caso $f * g \in C(G)$.)

Lema para el siguiente ejercicio (sin demostración). Sea f una función μ-medible. Entonces

$$\|f\|_2 = \sup \left\{ \left| \int f(x) g(x) d\mu(x) \right| : g \in L^2 \right\}.$$

8. Para todas $f \in L^1(G)$ y $g \in L^2(G)$, $\quad f * g \in L^2(G)$ y $\|f * g\|_2 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_2$.

Definición (operador de convolución). Sea $a \in W(\hat{G})$, $a = c + \mathfrak{F}k$ con $c \in \mathbb{C}$ y $k \in L^1(G)$ ($c = 0$ para G discreto). El operador C_a que actúa en $L^2(G)$ por la fórmula

$$C_a f := cf + k * f \quad (f \in L^2(G)),$$

se llama *operador de convolución con símbolo a*. La función k se llama *núcleo de convolución.*

9. Mostrar que en ambos casos (cuando G es compacto y cuando no lo es) el operador identico I del espacio $L^2(G, \mu)$ se puede escribir como operador de convolución.

Lema para el siguiente ejercicio (sin demostración). Si H_1 es un subespacio denso del espacio de Hilbert H, $A, B \in \mathcal{B}(H)$ y $Ax = Bx$ para todos $x \in H_1$, entonces $A = B$.

10. Para $f \in L^1(G)$ y $g \in L^2(G)$, $\quad \mathfrak{F}(f * g) = (\mathfrak{F}f) \cdot (\mathfrak{F}g)$.

11. Sea $a \in W(\hat{G})$. Encontrar la relación entre el operador de convolución C_a en $L^2(G)$ y el operador de multiplicación M_a en $L^2(\hat{G})$. Hallar $\|C_a\|$, $\mathrm{sp}(C_a)$ y $\mathrm{clos}(W(C_a))$.