Álgebra $C(K)$ de las funciones continuas

Sea K un compacto. Consideremos el álgebra $C(K)$ de todas las funciones definidas sobre K y continuas en K, con operaciones habituales (punto a punto) y con la norma-supremo. Nuestro objetivo es describir todos los funcionales multiplicativos y todos los ideales cerrados de esta álgebra.

1. $C(K)$ es una C^*-álgebra.

Definición (funcionales de evaluación). Para cada punto $t \in K$, definimos *el funcional de evaluación* en el punto t:

$$\varphi_t\colon C(K) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_t(a) := a(t).$$

2. Para $t \in K$, $\varphi_t \in \mathcal{M}(C(K))$.

Definición. Definimos el mapeo $\Phi\colon K \to \mathcal{M}(C(K))$ como $\Phi(t) := \varphi_t$.

3. El mapeo Φ es continuo.

4. Lema. Sea J un subespacio lineal en $C(K)$ tal que $J \cdot C(K) \subset J$. Supongamos que para cada punto $t \in K$ existe una función $g_t \in J$ y una vecindad U_t de t tales que $|g_t(u)| \geqslant 1$ para todos $u \in U_t$. Entonces $J = C(K)$. Sugerencia: mostrar que existe un elemento $h \in J$ tal que $h \geqslant 0$ y $\inf_{t\in K} h(t) > 0$.

5. El mapeo Φ es sobreyectivo.

6. Teorema. Φ es un homeomorfismo de K a $\mathcal{M}(C(K))$.

7. Describir la transformada de Gelfand Γ_A y sus propiedades para el álgebra $A = C(K)$.

8. Para un conjunto cerrado $Y \subset K$, el conjunto

$$J_Y := \{a \in C(K) \mid \forall t \in Y \ a(t) = 0\}$$

es un ideal cerrado en él algebra $C(K)$.

9. Lema. Sean J un ideal en $C(K)$, $f \in C(K)$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que para cada punto $t \in K$ existen una función $g_t \in J$ y una vecindad U_t de t tales que $|g_t(u)|^2 + \varepsilon \geqslant |f(u)|$ para todos $u \in U_t$. Entonces existe una función $h \in J$ tal que $\|f - h\| \leqslant \varepsilon$.

10. Teorema. Para cada ideal cerrado J en $C(K)$ existe un conjunto cerrado $Y \subset K$ tal que $J = J_Y$.

11. Cada ideal cerrado J en $C(K)$ es la intersección de todos los ideales maximales que contienen J.

12. Construir un ideal no cerrado en $C([0,1])$.