Operator de Toeplitz con símbolo acotado: la norma y el teorema de inclusión de espectros

En el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{T})$, la forma más general de operador de Toeplitz es operador de Toeplitz con símbolo *acotado*. Bajo esta condición (más amplia posible) establecemos la fórmula para la norma y el teorema de inclusión para el espectro.

Definición (operador de Toeplitz). Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. *Operador de Toeplitz con símbolo* a, $T_a\colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$, actúa mediante la siguiente fórmula:

$$T_a f = P^+(af) \qquad (f \in H^2(\mathbb{T})).$$

Aquí $P^+\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$ sobre $H^2(\mathbb{T})$.

1. $\|T_a\| \leqslant \|a\|_\infty$. (Más tarde mostraremos que $\|T_a\| = \|a\|_\infty$.)

2. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Expresar T_a a través de M_a, p^+ y j^+, donde $j^+\colon H^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ es el operador de inclusión y $p^+\colon L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ actúa por la misla regla que P^+.

Definición (matriz de un operador). Sean $\{f_n\}_{n\in J}$ una base en espacio de Hilbert H y $A \in \mathcal{B}(H)$. *La matriz del operador A en la base* $\{f_n\}_{n\in J}$ es la familia $\{\langle Af_k, f_j\rangle\}_{j,k\in J}$.

3. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Calcular la matriz del operador T_a en la base $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$, donde $e_n(t) = t^n$.

Aplicación $a \mapsto T_a$ es una isometría $*$-lineal

Vamos a mostrar que $\|T_a\| = \|M_a\| = \|a\|_\infty$. Se saben dos demostraciones. Una, más directa, es basada en la proposición, que M_a es límite puntual de los operadores T_a desplazados. Otra es basada en el teorema de inclusión de espectros.

4. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{B}(H)$, tal que para cada $x \in H$ existe $\lim_{n\to\infty} A_n x =: Bx$ y $\liminf_{n\to\infty} \|A_n\| < \infty$. Entonces $B \in \mathcal{B}(H)$ y

$$\|B\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|.$$

5. Explicar como actúa el operador $M_{e_{-n}} P^+ M_{e_n}$ en términos de coordenadas, i.e. calcular el operador $\mathcal{F}_\mathbb{Z}^{-1} M_{e_{-n}} P^+ M_{e_n} \mathcal{F}_\mathbb{Z}$. Mostrar que

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} M_{e_{-n}} P^+ M_{e_n} = I.$$

6. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces $M_a = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} M_{e_{-n}} P^+ M_a P^+ M_{e_n}$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} M_{e_{-n}} P^+ M_a P^+ M_{e_n} f = M_a f \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{T}).$$

7. Fórmula para la norma del operador de Toeplitz. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces

$$\|T_a\| = \|M_a\| = \|a\|_\infty.$$

8. La aplicación $\tau\colon L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(H^2(\mathbb{T}))$, $\tau(a) = T_a$, es una isometría lineal. Además, $\tau(a^*) = T_a^*$ para todos $a \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Teorema de inclusión de espectros

Para probar que $\operatorname{sp}(M_a) \subset \operatorname{sp}(T_a)$, necesitamos un criterio de invertibilidad para operadores en espasios de Banach.

9. Definición (operador acotado por abajo). El operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es *acotado por abajo* si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|Af\| \geqslant \varepsilon\|f\|$ para todos $f \in H$.

10. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces A es invertible $\iff$ A es acotado por abajo y $\mathcal{R}(A)$ es denso en H.

11. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces A es invertible $\iff$ A y A^* son acotados por abajo.

Ahora volvamos a los operadores de Toeplitz.

12. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Si T_a es invertible entonces M_a es invertible. (Mostrar que M_a y M_a^* son acotados por abajo.)

13. Teorema de inclusión de espectros para operadores de Toeplitz (Hartman-Wintner). Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces

$$\operatorname{sp}(M_a) \subset \operatorname{sp}(T_a).$$

14. Deducir la fórmula $\|T_a\| = \|M_a\|$ desde el teorema de inclusión de espectros.

15. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces $W(T_a) \subset W(M_a)$.

16. Fórmula para el rango esencial. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces

$$\operatorname{clos}(W(T_a)) = \operatorname{conv}(\mathcal{ER}(a)).$$

17. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces T_a es convexoidal: $\operatorname{clos}(W(T_a)) = \operatorname{conv}(\operatorname{sp}(T_a))$.

Resumen:

$$\boxed{\mathcal{ER}(a) \subset \operatorname{sp}(T_a) \subset \operatorname{clos}(W(T_a)) = \operatorname{conv}(\mathcal{ER}(a)).}$$