Operadores de Fredholm y el álgebra de Calkin

Supongamos que H es un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita. $\mathcal{C}(H)$ es el ideal de los operadores compactos en H. Con $\mathcal{R}(A) = \mathrm{im}(A) = A(H)$, denotamos el rango (la imagen) del operador A.

1. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces $\mathrm{clos}(\mathrm{im}(A)) = (\ker A^*)^\perp$.

Definición (operador normalmente soluble). El operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es *normalmente soluble* si para todo $y \in H$ la solubilidad de ecuación $Ax = y$ es equivalente a la condición: $f(y) = 0$ para todos $f \in \ker A^*$.

2. El operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es normalmente soluble $\iff$ $\mathrm{im}(A)$ es cerrado.

3. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces $H/\mathrm{clos}(\mathrm{im}(A))$ y $\ker A^*$ son isomorfas (como espacios de Hilbert).

4. Definición (operador de Fredholm). El operador $A \in \mathcal{B}(H)$ se llama *operador de Fredholm* si $A(H)$ es cerrado en H, $\dim(\ker A) < \infty$ y $\dim(\ker A^*) < \infty$. El conjunto de todos los operadores de Fredholm en H denotemos con $\mathcal{F}(H)$.

5. Si $\dim(\ker A^*) < \infty$ entonces $A(H)$ es cerrado en H. Esto significa que en la definición de operadores de Fredholm la condición "$A(H)$ es cerrado" es redundante.

6. Lema. Sea M un subespacio cerrado en H y N un subespacio lineal de dimensión finita en H. Entonces $M + N$ es un subespacio cerrado en H.

7. Teorema (criterio de operador de Fredholm). Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A \in \mathcal{F}(H)$.

(b) existen *regularizadores de la izquierda y de la derecha* del operador A, i.e. operadores $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(H)$ tales que $B_1 A = I + K_1$ y $AB_2 = I + K_2$ con $K_1, K_2 \in \mathcal{C}(H)$.

(c) existe un *regularizador* de A, i.e. un operador $B \in \mathcal{B}(H)$ tal que $BA = I + K_1$ y $AB = I + K_2$ con $K_1, K_2 \in \mathcal{C}(H)$.

(d) $\exists B \in \mathcal{B}(H)$ tal que $BA = I + K_1$ y $AB = I + K_2$ con $K_1, K_2 \in \mathcal{FR}(H)$.

Definición (álgebra de Calkin). El álgebra cociente $\mathcal{B}(H)/\mathcal{C}(H)$ se llama el *álgebra de Calkin*. Denotemos con π el homomorfism canónico $\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)/\mathcal{C}(H)$.

8. Teorema (Atkinson). Un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es operador de Fredholm si y solo si $\pi(A)$ es invertible en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}(H)/\mathcal{C}(H)$:

$$\mathcal{F}(H) = \pi^{-1}(\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(H)/\mathcal{C}(H))).$$

Definición (el índice del operador de Fredholm). Sea $A \in \mathcal{F}(H)$. *El índice* de A se define como

$$\operatorname{ind}(A) := \dim\ker A - \dim\ker A^*.$$

9. Para todo $A \in \mathcal{F}(H)$, $A^* \in \mathcal{F}(H)$ y $\operatorname{ind}(A^*) = -\operatorname{ind}(A)$. En particular, el conjunto $\mathcal{F}(H)$ es autoadjunto.

10. Sean $A, B \in \mathcal{F}(H)$. Entonces $AB \in \mathcal{F}(H)$ y

$$\operatorname{ind}(AB) = \operatorname{ind}(A) + \operatorname{ind}(B).$$

11. El conjunto $\mathcal{F}(H)$ es cerrado al respecto de perturbaciones compactas, y el índice es estable al respecto de perturbaciones compactas: si $A \in \mathcal{F}(H)$ y $B \in \mathcal{C}(H)$, entonces $A + B \in \mathcal{F}(H)$ y $\operatorname{ind}(A + B) = \operatorname{ind}(A)$.

12. Para todo $A \in \mathcal{F}(H)$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}(H)$ con $\|B\| < \delta$, $A + B \in \mathcal{F}(H)$,

$$\operatorname{ind}(A + B) = \operatorname{ind}(A),$$

$$\dim\ker(A + B) \leqslant \dim\ker(A), \qquad \dim\ker(A + B)^* \leqslant \dim\ker(A^*).$$

Esto significa que el conjunto $\mathcal{F}(H)$ es abierto en $\mathcal{B}(H)$, el índice es estable al respecto de perburbaciones pequeñas, y las funciones $A \mapsto \dim\ker A$ y $A \mapsto \dim\ker A^*$ son *semi-estables* al respecto de perburbaciones pequeñas.