Transformada de Fourier para los grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}_m$

Definición (grupo topológico). Un *grupo topológico* G es un grupo que es también un espacio topológico tal que la multiplicación del grupo $G \times G \to G$ y la operación de inversión $G \to G$ son aplicaciones continuas.

En esta sección supongamos que G es un grupo abeliano localmente compacto. Lo último significa que cada punto de G tiene una vecindad compacta (es suficiente exigir que la unidad e del grupo tiene una vecindad compacta).

Definición (medida de Haar). Una medida de Haar en G es una medida μ contablemente aditiva definida en los conjuntos de Borel de G que es *invariante*:

$$\mu(xY) = \mu(Y) \quad \forall x \in G \quad \forall Y \text{ de Borel.}$$

Teorema (existencia y unicidad de la medida de Haar). La medida de Haar en G existe y es única salvo a multiplicación a factores positivos.

Ejemplos. Para cada ejemplo fijamos una medida de Haar.

- $\mathbb{Z}$ es discreto y no compacto, $\mu_{\mathbb{Z}}(\{0\}) = 1$.
- $\mathbb{T}$ es compacto y no discreto, $\mu_{\mathbb{T}}(\mathbb{T}) = 1$.
- $\mathbb{R}$ no es compacto ni discreto, $\mu_{\mathbb{R}}([0,1]) = 1$.
- $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es discreto y compacto (i.e. finito), $\mu_{\mathbb{Z}_m}(\{0\}) = 1$.

Definición (carácter). Un *carácter* de G es un homomorfismo continuo $G \to \mathbb{T}$.

Definición (grupo dual). El *grupo dual* de G, denotado con $\hat{G}$, es el conjunto de todos los carácteres de G, considerado con la multiplicacón punto a punto

$$(\varphi\psi)(x) := \varphi(x)\psi(x)$$

y con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

Teorema (sobre el grupo dual). El grupo dual es un grupo abeliano localmente compacto. Si el grupo G es compacto, entonces $\hat{G}$ es discreto. Si el grupo G es discreto, entonces $\hat{G}$ es compacto.

Definición (transformada de Fourier en general). Sea μ una medida de Haar en G. El operador $\mathcal{F}\colon L_1(G,\mu) \to L_\infty(\hat{G})$ se define mediante

$$(\mathcal{F} f)(\varphi) := \int\limits_G f(x)\varphi(x)d\mu(x).$$

Teorema de Plancherel generalizada. Sea μ una medida de Haar en G. Entonces existe una medida de Haar $\hat{\mu}$ en $\hat{G}$ tal que

$$\int_G |f(x)|^2 \, d\mu(x) = \int_{\hat{G}} |(\mathcal{F} f)(\varphi)|^2 \, d\hat{\mu}(\varphi) \qquad \forall f \in L_1(G,\mu) \cap L_2(G,\mu),$$

i.e. operador $\mathcal{F}$, restringido a $L_1(G,\mu) \cap L_2(G,\mu)$, actua como una isometría en $L_2(\hat{G})$. Por lo tanto este operador se puede extender a un isomorfismo isométrico $\mathcal{F}_2 \colon L_2(G,\mu) \to L_2(\hat{G},\hat{\mu})$.

Teorema de dualidad de Pontryagin. Para cada $x \in G$ definimos el mapeo $\psi_x \colon \hat{G} \to \mathbb{T}$ mediante

$$\psi_x(\varphi) = \varphi(x) \qquad (\varphi \in \hat{G}).$$

Entonces $\psi_x \in \hat{\hat{G}}$ para cada $x \in G$, y el mapeo $x \mapsto \psi_x$ es el isomorfismo homeomórfico de G sobre $\hat{\hat{G}}$. En particular, el grupo bidual $\hat{\hat{G}}$ es homeorficamente isomorfo a G.

Algunas propiedades de $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{Z}_m$

1. Sea H un subgrupo de $\mathbb{R}$, $H \neq \{0\}$, $\alpha := \inf\{x \in H \colon x > 0\}$. Supongamos que $\alpha > 0$. Entonces $H = \alpha\mathbb{Z}$.

2. Sea H un subgrupo de $\mathbb{R}$, $H \neq \{0\}$, $\alpha := \inf\{x \in H \colon x > 0\}$. Supongamos que $\alpha = 0$. Entonces H es denso en $\mathbb{R}$.

3. Teorema (descripción de subgrupos cerrados de $\mathbb{R}$). Cada subgrupo cerrado H de $\mathbb{R}$ tiene una de las siguientes formas: $H = \{0\}$ ó $H = \mathbb{R}$ ó $H = \alpha\mathbb{Z}$ para algún $\alpha > 0$.

4. Proposición (dos formas del grupo cíclico finito). Para $m \in \{1, 2, \ldots\}$, el grupo $C_m := \{t \in \mathbb{T} \colon t^m = 1\}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_m$.

5. Teorema (descripción de subgrupos cerrados de $\mathbb{T}$). Cada subgrupo cerrado H de $\mathbb{T}$ coincide con $\mathbb{T}$ o con C_m para algún $m \in \{1, 2, \ldots\}$.

6. Teorema (descripción de automorfismos de $\mathbb{T}$). Hay solo dos automorfismos continuos del grupo $\mathbb{T}$: $t \mapsto t$ y $t \mapsto t^{-1}$.

Descripción de carácteres de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}_m$

7. Cada carácter de $\mathbb{Z}$ tiene la forma φ_τ para algún $\tau \in \mathbb{T}$, donde $\varphi_\tau(k) := \tau^k$.

8. Cada carácter de $\mathbb{T}$ tiene la forma φ_n para algún $n \in \mathbb{Z}$, donde $\varphi_n(t) := t^n$.

9. Cada carácter de $\mathbb{R}$ tiene la forma φ_u para algún $u \in \mathbb{R}$, donde $\varphi_u(x) = e^{iux}$.

10. Cada carácter de $\mathbb{Z}_m$ tiene la forma φ_k para algún $k \in \mathbb{Z}_m$, donde $\varphi_k(n) = e^{2\pi i k n/m}$.